

KOŁOKWIUM ZE WSTĘPU DO MATEMATYKI WZORCOWE ROZWIĄZANIA

18.12.2023

Zadanie 1. Dana jest indeksowana rodzina zbiorów $\langle A_{n,m} : n, m \in \mathbb{N} \rangle$ określona następująco:

$$A_{n,m} = \{X \subseteq \mathbb{N} : n \in X \wedge |X| \leq m\}.$$

a) Wypisz wszystkie elementy i wszystkie podzbiory zbioru $A_{0,2} \cap \mathcal{P}(\{0, 1, 2\})$.

Mamy $A_{0,2} = \{\{0, k\} : k \in \mathbb{N}\}$, a zatem

$$A_{0,2} \cap \mathcal{P}(\{0, 1, 2\}) = \{\{0, k\} : k \in \{0, 1, 2\}\} = \{\{0\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}\},$$

a zatem elementy to

- $\{0\}$,
- $\{0, 1\}$,
- $\{0, 2\}$.

Podzbiorów jest w takim razie osiem i są to:

- $\emptyset$,
- $\{\{0, 2\}\}$,
- $\{\{0\}, \{0, 1\}\}$,
- $\{\{0\}\}$,
- $\{\{0, 1\}, \{0, 2\}\}$,
- $\{\{0\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}\}$.
- $\{\{0, 1\}\}$,
- $\{\{0\}, \{0, 2\}\}$,

b) Znajdź zbiór $\bigcap_{m=1}^{\infty} A_{2023,m}$.

Twierdzę, że $\bigcap_{m=1}^{\infty} A_{2023,m} = \{\{2023\}\}$. Rzeczywiście,

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} A_{2023,m} \subseteq A_{2023,1} = \{\{2023\}\}.$$

Oczywiście dla każdego $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, mamy $\{2023\} \in A_{2023,m}$, bowiem $2023 \in \{2023\}$ oraz $|\{2023\}| = 1 \leq m$. Zatem $\{2023\} \in \bigcap_{m=1}^{\infty} A_{2023,m}$, czyli inaczej mówiąc $\{\{2023\}\} \subseteq \bigcap_{m=1}^{\infty} A_{2023,m}$.

c) Rozstrzygnij, czy $\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} A_{n,m} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} A_{n,m}$.

Tak, oba te zbiory są równe zbiorowi wszystkich singletonów liczb naturalnych.

$$S = \{\{k\} : k \in \mathbb{N}\}.$$

Dowodzimy najpierw, że $\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} A_{n,m} = S$. Po pierwsze zauważmy, że jeśli $A \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} A_{n,m}$, to dla każdego $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ istnieje $n \in \mathbb{N}$, że $A \in A_{n,m}$. W szczególności istnieje $n \in \mathbb{N}$, że $A \in A_{n,1}$. A zatem $|A| = 1$, bowiem $|A| \leq 1$ oraz $n \in A$, a zatem $A \in S$. Z drugiej strony, jeśli $\{k\} \in S$ ($k \in \mathbb{N}$), to dla każdego $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, $\{k\} \in A_{k,m}$, bowiem $|\{k\}| = 1 \leq m$ oraz $k \in \{k\}$. Zatem dla każdego $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ $\{k\} \in \bigcup_{n=0}^{\infty} A_{n,m}$, a więc $\{k\} \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} A_{n,m}$.

Następnie dowodzimy, że $\bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} A_{n,m} = S$. Załóżmy na początek, że

$$A \in \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} A_{n,m}.$$

Oznacza to, że istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że dla każdego $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$, $A \in A_{n,m}$. Ale wtedy w szczególności $A \in A_{n,1}$, mamy więc, że $|A| = 1$, bowiem $|A| \leq 1$ oraz $n \in A$. Zatem $A \in S$. Niech teraz $\{k\} \in S$ ($k \in \mathbb{N}$). Zauważmy ponownie, że dla każdego $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$, $\{k\} \in A_{k,m}$, bowiem $|\{k\}| = 1 \leq m$ oraz $k \in \{k\}$. A zatem $\{k\} \in \bigcap_{m=1}^{\infty} A_{k,m}$. Ale w takim razie $\{k\} \in \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} A_{n,m}$.

Zadanie 2. Rozważmy funkcję $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ określoną wzorem

$$f(x, y) = \langle xy, y \rangle \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}.$$

- a) Rozstrzygnij, czy funkcja f jest różnowartościowa i czy jest surjekcją (to znaczy, czy jest na zbiór $\mathbb{R}^2$).

Funkcja ta nie jest różnowartościowa, bowiem na przykład,

$$f(0, 0) = \langle 0, 0 \rangle = f(1, 0).$$

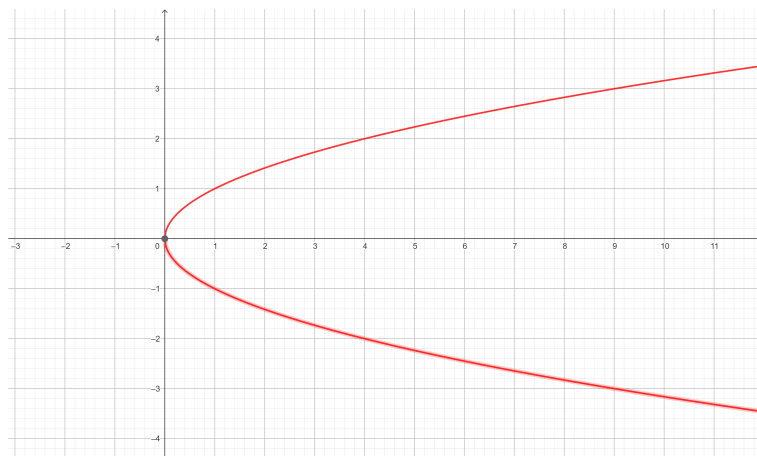
Nie jest też surjekcją, bowiem na przykład $\langle 1, 0 \rangle \notin R_f$. Rzeczywiście, zakładając przeciwnie, że dla pewnych $\langle x, y \rangle$ zachodzi $f(x, y) = \langle xy, y \rangle = \langle 1, 0 \rangle$, dostajemy $y = 0$, oraz $xy = 1$, co stanowi sprzeczność.

- b) Znajdź i naszkicuj obraz względem funkcji f zbioru $A = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$.

Mamy

$$f[A] = \{f(x, y) : \langle x, y \rangle \in A\} = \{\langle xy, y \rangle : x = y, x, y \in \mathbb{R}\} = \{\langle y^2, y \rangle : y \in \mathbb{R}\}.$$

Co na rysunku wygląda następująco:



- c) Wyznacz i naszkicuj przeciwobraz względem funkcji f zbioru $B = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\}$.

$$f^{-1}[B] = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) \in B\} = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : \langle xy, y \rangle \in B\} = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : xy \leq y\}.$$

Zauważmy teraz, że $xy \leq y$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $y(x - 1) \leq 0$, skąd mamy

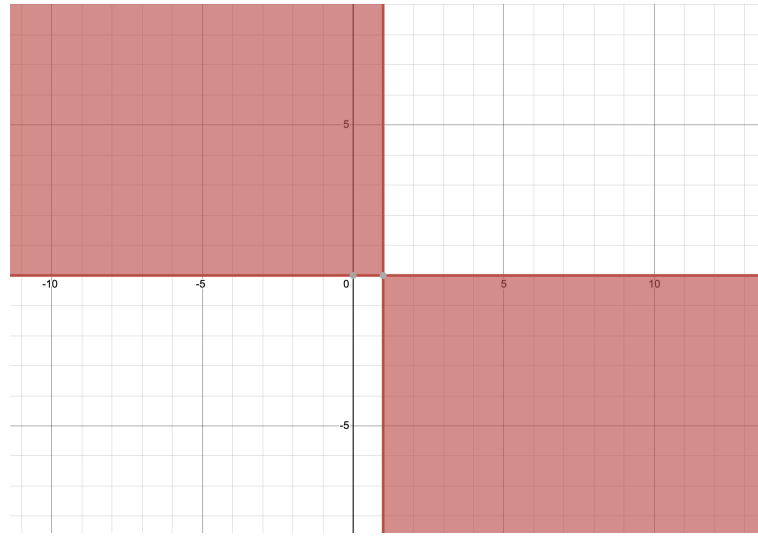
$$y = 0 \vee x = 1 \vee (y < 0 \wedge x > 1) \vee (y > 0 \wedge x < 1).$$

Stąd:

$$f^{-1}[B] = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : (y = 0) \vee (x = 1) \vee (y < 0 \wedge x > 1) \vee (y > 0 \wedge x < 1)\} =$$

$$= [1, \infty) \times (-\infty, 0] \cup (-\infty, 1] \times [0, \infty),$$

co na rysunku wygląda następująco:



Zadanie 3.

- a) Udowodnij, że jeżeli zbiór $X \subseteq \mathbb{R}$ ma tę własność, że dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ zbiór $X \cap [a, b]$ jest co najwyżej przeliczalny, to zbiór X jest co najwyżej przeliczalny.

Niech X będzie zbiorem spełniającym warunki zadania.

Dla $n \in \mathbb{N}$, niech $X_n = X \cap [-n, n]$. Oczywiście X_n jest zatem co najwyżej przeliczalny.

Mamy też $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$, bowiem, jeśli $x \in X$, to $x \in X_k$ dla $k = \lceil |x| \rceil$, gdzie $\lceil a \rceil$ oznacza zaokrąglenie w górę liczby a , a zatem $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$. Zawieranie $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n \subseteq X$ jest natomiast oczywiste.

W takim razie X jest sumą przeliczalnej rodziny zbiorów co najwyżej przeliczalnych, a zatem na mocy faktu z wykładu, jest zbiorem co najwyżej przeliczalnym.

- b) Niech $X \subseteq \mathbb{R}$ będzie zbiorem nieprzeliczalnym. Udowodnij, że istnieje nieskończony ciąg zbiorów nieprzeliczalnych $\langle X_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ taki, że $X_0 = X$, dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $X_{n+1} \subseteq X_n$ oraz

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} X_n = \emptyset.$$

Na mocy poprzedniego zadania, istnieją $a, b \in \mathbb{R}$, że zbiór $X \cap [a, b]$ jest nieprzeliczalny (w szczególności jasne jest, że wtedy $b > a$). Oznaczmy $d = b - a$.

Skonstruujemy indukcyjnie ciąg $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ taki, że $X \cap [a_n, a_n + d/2^{n-1}]$ jest nieprzeliczalny. Mamy $a_1 = a$.

Zakładając, że znaleźliśmy a_k takie, że zbiór $X \cap [a_k, a_k + d/2^{k-1}]$ jest nieprzeliczalny, zauważmy, że

$$X \cap [a_k, a_k + d/2^{k-1}] = (X \cap [a_k, a_k + d/2^k]) \cup (X \cap [a_k + d/2^k, a_k + d/2^{k-1}]).$$

Wobec tego co najmniej jeden zbiór z dwóch po prawej stronie równości jest nieprzeliczalny. Rzeczywiście, jeśli oba byłyby co najwyżej przeliczalne, ich suma też byłaby co najwyżej przeliczalna, na mocy faktu z wykładu. Zatem możemy ustalić $a_{k+1} = a_k$, jeśli $X \cap [a_k, a_k + d/2^k]$ jest nieprzeliczalny oraz $a_{k+1} = a_k + d/2^k$ w przeciwnym przypadku.

Zauważmy także, że zbiór $Z = \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} [a_n, a_n + d/2^{n-1}]$ jest zbiorem co najwyżej jednoelementowym¹. Rzeczywiście, jeśli $x, y \in Z$, to dla każdego $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ $|x - y| \leq 1/2^{n-1}$, bowiem $x, y \in [a_n, a_n + d/2^{n-1}]$. Wobec tego $x = y$.

Dla $n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ definiujemy $X_n = X \cap [a_n, a_n + d/2^{n-1}] \setminus Z$. Oczywiście skoro Z jest zbiorem co najwyżej jednoelementowym, a $X \cap [a_n, a_n + d/2^{n-1}]$ jest nieprzeliczalny, to X_n też jest nieprzeliczalny.

Bezpośrednio z konstrukcji wynika również, że $X_{n+1} \subseteq X_n$. Co więcej

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} X_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} ([a_n, a_n + d/2^{n-1}] \setminus Z) = \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} [a_n, a_n + d/2^{n-1}] \setminus Z = Z \setminus Z = \emptyset,$$

a zatem skonstruowana rodzina zbiorów dowodzi tezy zadania.

¹Można zauważyć, że jest zbiorem dokładnie jednoelementowym, ale nie jest to niezbędne w dalszym rozumowaniu